ЭКЗАМЕНАЦИОННОЕ ЗАДАНИЕ

по математическому анализу за второй семестр
для студентов первого курса второго потока
Лектор профессор В.А.Зорич, 2011/12 уч.год

1. a) Каков геометрический смысл сумм Дарбу, в чём состоит теорема Дарбу и какой критерий интегрируемости функции по Риману она порождает?

b) Используя критерий Лебега интегрируемости функции по Риману, объясните интегрируемость функции Римана ($R(x) := 0$, когда x иррационально, и $R(x) := 1/n$, когда $x = m/n$ — несократимая дробь с натуральным знаменателем).

c) Всегда ли интегрируема композиция интегрируемых по Риману функций?

2. a) Функция $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2} dt$, называемая *интегралом вероятности ошибок*, имеет пределом 1 при $x \to +\infty$. Изобразите график этой функции и найдите её производную.

b) Покажите, что при $x \to +\infty$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right) \right).$$

c) Как продолжить эту асимптотическую формулу до ряда? Сходится ли этот ряд хотя бы при каком-то значении $x \in \mathbb{R}$?

3. a) Подсчитайте работу по перемещению массы в гравитационном поле Земли и покажите, что эта работа зависит только от уровней высот исходного и конечного положений.

b) Найдите для Земли работу выхода из её гравитационного поля и соответствующую (вторую) космическую скорость.

4. a) Является ли компактом единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, в $\mathbb{R}^\infty_0$, в $C[a, b]$?

b) На поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^3$ температура T как функция точки меняется непрерывно. Обязаны ли на сфере быть точки минимума и максимума температуры? При наличии точек с двумя фиксированными значениями температуры, должны ли быть точки и с промежуточными её значениями? Что из этого верно в случае, когда единичная сфера S берётся в пространстве $C[a, b]$, а температура в точке $f \in S$ выражается в виде $T(f) = \left(\int\limits_a^b |f|(x)\, dx \right)^{-1}$?

5. Найдите итерационным процессом функцию f, удовлетворяющую уравнению $f(x) = x + \int\limits_0^x f(t)\, dt$.

6. a) Укажите формулы для вычисления линейных поправок к значениям величин A^{-1}, $\exp(E)$, $\det(E)$, $< a, b >$ при малом изменении аргументов (здесь A — обратимая, E — единичная матрицы; a, b — векторы; $< \cdot, \cdot >$ — скалярное произведение).

b) Какова относительная погрешность $\delta = \frac{|\Delta f|}{|f|}$ при вычислении значения функции $f(x, y, z)$ в точке (x, y, z), координаты которой даны с абсолютными погрешностями Δx, Δy, Δz соответственно?

7. a) Дифференцирование композиции функций (отображений) и обратной функции. Какова координатная запись этих законов применительно к различным случаям отображений $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$?

b) В чём состоят теорема о среднем и общая теорема о конечном приращении?

c) Одна из частных производных функции двух переменных, заданной в круге, равна нулю во всех точках круга. Значит ли это, что функция не зависит от соответствующей переменной в этом круге? Изменится ли ответ, если вместо круга взять произвольную выпуклую область? А если взять вообще произвольную область?

8. a) Пусть $F(x, y, z) = 0$. Верно ли, что $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -1$? Проверьте это на зависимости $\frac{xy}{z} - 1 = 0$ (соответствующей уравнению Клапейрона $\frac{PV}{T} = R$ состояния идеального газа).

b) Пусть теперь $F(x, y) = 0$. Верно ли, что $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = 1$?

9. Опишите процедуру поиска экстремумов гладкой функции в замкнутой области пространства и продемонстрируйте её в деталях на примере отыскания экстремумов функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ в эллипсоиде $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$, считая, что $0 < c < b < a$.

Примечание. Почти всё это задание, как Вы могли заметить, состоит из задач, взятых из того списка, который уже был Вам дан для подготовки к коллоквиуму и экзамену. Сдающие досрочно, по нашей договорённости, должны иметь при себе решения задач коллоквиума, поэтому готовые к ответу задачи можно будет рассказывать по Вашим домашним заготовкам. Писать надо только новое.